第4章 1 「変数分離形」 第2回

解答

C は任意定数とする

1. (1) $\log|t-2|+C$

(2) $\dfrac{1}{2t^2}+C$

2. (1) $x=C(t-2)^2$

(2) $x=Ce^{-\frac{1}{t^2}}$

(3) $x=Ct-1$

(4) $x^2=Ct+2$

3. $x=\dfrac{1}{-\sin t+1}$

解説

c, C はそれぞれ任意定数とする

1. (1) $\displaystyle\int\frac{1}{t-2}dt=\log|t-2|+C$

(2) $\displaystyle\int\left(-\frac{1}{t^3}\right)dt=-\int t^{-3}dt=-\left(-\frac{1}{2}t^{-2}\right)+C$
$\displaystyle=\frac{1}{2t^2}+C$

2. (1) 両辺を x で割ると $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{t-2}$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{2}{t-2}dt$$

1.(1) より $\log|x|=2\log|t-2|+c$

$\log|x|-\log|t-2|^2=c$ より $\log\left|\dfrac{x}{(t-2)^2}\right|=c$

$\left|\dfrac{x}{(t-2)^2}\right|=e^c$ より $x=\pm e^c(t-2)^2$

$C=\pm e^c$ とおくと, 求める一般解は

$$x=C(t-2)^2$$

(2) 両辺を x で割ると $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{t^3}$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{2}{t^3}dt$$

1.(2) より $\log|x|=-\dfrac{1}{t^2}+c$

$|x|=e^{-\frac{1}{t^2}+c}$ より $x=\pm e^ce^{-\frac{1}{t^2}}$

$C=\pm e^c$ とおくと，求める一般解は

$$x=Ce^{-\frac{1}{t^2}}$$

(3) 両辺を $1+x$ で割ると $\dfrac{1}{x+1}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x+1}dx=\int\frac{1}{t}dt$$

$$\log|x+1|=\log|t|+c$$

$\log|x+1|-\log|t|=c$ より $\log\left|\dfrac{x+1}{t}\right|=c$

$\left|\dfrac{x+1}{t}\right|=e^c$ より $x=\pm e^ct-1$

$C=\pm e^c$ とおくと, 求める一般解は

$$x=Ct-1$$

(4) 両辺に $\dfrac{2x}{x^2-2}$ をかけると $\dfrac{2x}{x^2-2}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{2x}{x^2-2}dx=\int\frac{1}{t}dt$$

$x^2-2=s$ とおくと, $2xdx=ds$ より

$\displaystyle\int\frac{2x}{x^2-2}dx=\int\frac{1}{s}ds=\log|s|=\log|x^2-2|$

よって, $\log|x^2-2|=\log|t|+c$

$\log|x^2-2|-\log|t|=c$ より $\log\left|\dfrac{x^2-2}{t}\right|=c$

$\left|\dfrac{x^2-2}{t}\right|=e^c$ より $x^2=\pm e^ct+2$

$C=\pm e^c$ とおくと, 求める一般解は

$$x^2=Ct+2$$

3. 両辺を x^2で割ると $\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dx}{dt}=\cos t$

両辺を t について積分すると

$\displaystyle\int\frac{1}{x^2}dx=\int\cos t dt$ より $-\dfrac{1}{x}=\sin t+c$

$\dfrac{1}{x}=-\sin t-c$ より $x=\dfrac{1}{-\sin t-c}$

$C=-c$ とおくと，$x=\dfrac{1}{-\sin t+C}$

よって, 求める一般解は $x=\dfrac{1}{-\sin t+C}$

ここで $t=0$ のとき $x=1$ なので

$1=\dfrac{1}{-0+C}$ より $C=1$

よって, 求める解は $x=\dfrac{1}{-\sin t+1}$