第2章 4 「極大・極小」 第3回

解答

1. (1) $(3,1)$　(2) $(1,-2)$　(3) $(\pm 1, \mp 1)$ (複号同順)

(4) $(\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{5})$, $(\pm 1, \mp 1)$ (複号同順)

2. (1) 点 $(5,2)$ で極大値 36

(2) 点 $(-1,-1)$ で極大値 $\dfrac{1}{e^2}$

解説

1. (1) $z_x = 2x - 5y - 1 = 0$ より $2x - 5y = 1 \cdots ①$

$z_y = -5x + 6y + 9 = 0$ より $5x - 6y = 9 \cdots ②$

$② \times 2 - ① \times 5$ より $13y = 13$, よって $y = 1$

①より $x = 3$

極値をとり得る点は $(3,1)$

(2) $z_x = 6x + 2y - 2 = 0$ より $3x + y = 1 \cdots ①$

$z_y = 2x - 2y - 6 = 0$ より $x - y = 3 \cdots ②$

$① + ②$ より $4x = 4$, よって $x = 1$

①より $y = -2$

極値をとり得る点は $(1,-2)$

(3) $z_x = 3x^2 + 6xy + 3 = 0$ より

$x^2 + 2xy = -1 \cdots ①$

$z_y = 3x^2 - 3y^2 = 0$ より $x^2 = y^2 \cdots ②$

②より $y = \pm x$

$y = x$ のとき①より $3x^2 = -1$, 実数解なし.

$y = -x$ のとき①より $-x^2 = -1, x^2 = 1$

$\therefore x = \pm 1$

$x = 1$ のとき $y = -1$, $x = -1$ のとき $y = 1$

極値をとり得る点は $(\pm 1, \mp 1)$ (複号同順)

(4) $z_x = 3x^2 - 3y^2 = 0, z_y = -6xy + 9y^2 - 15 = 0$

より $x^2 = y^2 \cdots ①, 3y^2 - 2xy = 5 \cdots ②$

①より $y = \pm x$

$y = x$ のとき②より $x^2 = 5$　$\therefore x = \pm\sqrt{5}$

$x = \sqrt{5}$ のとき $y = \sqrt{5}$

$x = -\sqrt{5}$ のとき $y = -\sqrt{5}$

$y = -x$ のとき②より $5x^2 = 5, x^2 = 1$

$\therefore x = \pm 1$

$x = 1$ のとき $y = -1, x = -1$ のとき $y = 1$

極値をとり得る点は $(\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{5}), (\pm 1, \mp 1)$

(複号同順)

2. (1) $z_x = -4x + 3y + 14 = 0$ より $4x - 3y = 14 \cdots ①$

$z_y = 3x - 8y + 1 = 0$ より $3x - 8y = -1 \cdots ②$

$① \times 3 - ② \times 4$ より $23y = 46$ よって $y = 2$

①より $x = 5$, 極値をとり得る点は $(5,2)$

$z_{xx} = -4, z_{xy} = 3, z_{yy} = -8$

$H = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2$

$= -4 \cdot (-8) - 3^2 = 23 > 0,$

$z_{xx} = f_{xx} = -4 < 0$　$\therefore$ 極大

$x = 5, y = 2$ のとき

$z = -2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 \cdot 2 - 4 \cdot 2^2 + 14 \cdot 5 + 2 = 36$

よって点 $(5,2)$ で極大値 36 をとる.

(2) $(e^{x+y})_x = e^{x+y}(x+y)_x = e^{x+y}$

$(e^{x+y})_y = e^{x+y}(x+y)_y = e^{x+y}$ だから

$z_x = (xy)_x e^{x+y} + xy(e^{x+y})_x = ye^{x+y} + xye^{x+y}$

$= y(1+x)e^{x+y} = 0$

$z_y = (xy)_y e^{x+y} + xy(e^{x+y})_y = xe^{x+y} + xye^{x+y}$

$= x(1+y)e^{x+y} = 0$

$e^{x+y} > 0$ より $y(1+x) = 0 \cdots ①$

$x(1+y) = 0 \cdots ②$

①より $y = 0$ または $x = -1$

②より $x = 0$ または $y = -1$

極値をとり得る点は $(0,0), (-1,-1)$

$z_{xx} = (y + xy)_x e^{x+y} + (y + xy)(e^{x+y})_x$

$= (2y + xy)e^{x+y}$

$z_{xy} = (y + xy)_y e^{x+y} + (y + xy)(e^{x+y})_y$

$= (1 + x + y + xy)e^{x+y}$

$z_{yy} = (x + xy)_y e^{x+y} + (x + xy)(e^{x+y})_y$

$= (xy + 2x)e^{x+y}$

点 $(0,0)$ において

$z_{xx} = 0, z_{xy} = 1, z_{yy} = 0$

$H = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2$

$= -1 < 0$, $\therefore$ 極値をとらない.

点 $(-1,-1)$ において

$z_{xx} = -e^{-2}, z_{xy} = 0, z_{yy} = -e^{-2}$

$H = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2$

$= e^{-4} > 0$, $z_{xx} = f_{xx} = -e^{-2} < 0$ $\therefore$ 極大

$x = -1, y = -1$ のとき $z = (-1)^2 e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$

よって点 $(-1,-1)$ で極大値 $\dfrac{1}{e^2}$ をとる.