第2章 3 「高次偏導関数」 第3回

解答

1. (1) $z_{xx}=12x^2y+6y^3, z_{xy}=4x^3+18xy^2$

(2) $z_{xx}=-\dfrac{1}{4\sqrt{(x+y^2)^3}}, z_{xy}=-\dfrac{y}{2\sqrt{(x+y^2)^3}}$

(3) $z_{xx}=4e^{2x-y^2}, z_{xy}=-4ye^{2x-y^2}$

(4) $z_{xx}=-9\sin 3x\cos 2y, z_{xy}=-6\cos 3x\sin 2y$

2. (1) $z_{xx}=24x^2y+6y^2, z_{xy}=8x^3+12xy$

$z_{yx}=8x^3+12xy, z_{yy}=6x^2-6y$

(2) $z_{xx}=-\dfrac{1}{(x-y^2)^2}, z_{xy}=\dfrac{2y}{(x-y^2)^2}$

$z_{yx}=\dfrac{2y}{(x-y^2)^2}, z_{yy}=-\dfrac{2(x+y^2)}{(x-y^2)^2}$

解説

1. (1) $z_x=(x^4y+3x^2y^3-y^5)_x=4x^3y+6xy^3$

$z_{xx}=(4x^3y+6xy^3)_x=12x^2y+6y^3$

$z_{xy}=(4x^3y+6xy^3)_y=4x^3+18xy^2$

(2) $z_x=\{(x+y^2)^{\frac{1}{2}}\}_x=\dfrac{1}{2}(x+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x+y^2)_x$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x+y^2}}$

$z_{xx}=\dfrac{1}{2}\{(x+y^2)^{-\frac{1}{2}}\}_x$

$=-\dfrac{1}{4}(x+y^2)^{-\frac{3}{2}}(x+y^2)_x=-\dfrac{1}{4\sqrt{(x+y^2)^3}}$

$z_{xy}=\dfrac{1}{2}\{(x+y^2)^{-\frac{1}{2}}\}_y$

$=-\dfrac{1}{4}(x+y^2)^{-\frac{3}{2}}(x+y^2)_y=-\dfrac{2y}{4\sqrt{(x+y^2)^3}}$

$=-\dfrac{y}{2\sqrt{(x+y^2)^3}}$

(3) $z_x=e^{2x-y^2}(2x-y^2)_x=2e^{2x-y^2}$

$z_{xx}=(2e^{2x-y^2})_x=2e^{2x-y^2}(2x-y^2)_x$

$=4e^{2x-y^2}$

$z_{xy}=(2e^{2x-y^2})_y=2e^{2x-y^2}(2x-y^2)_y$

$=-4ye^{2x-y^2}$

(4) $z_x=(\sin 3x)_x\cos 2y=3\cos 3x\cos 2y$

$z_{xx}=(3\cos 3x\cos 2y)_x=3(\cos 3x)_x\cos 2y$

$=-9\sin 3x\cos 2y$

$z_{xy}=(3\cos 3x\cos 2y)_y=3\cos 3x(\cos 2y)_y$

$=-6\cos 3x\sin 2y$

2. (1) $z_x=(2x^4y+3x^2y^2-y^3)_x=8x^3y+6xy^2$

$z_{xx}=(8x^3y+6xy^2)_x=24x^2y+6y^2$

$z_{xy}=(8x^3y+6xy^2)_y=8x^3+12xy$

$z_y=(2x^4y+3x^2y^2-y^3)_y=2x^4+6x^2y-3y^2$

$z_{yx}=(2x^4+6x^2y-3y^2)_x=8x^3+12xy$

$z_{yy}=(2x^4+6x^2y-3y^2)_y=6x^2-6y$

(2) $z_x=\dfrac{(x-y^2)_x}{x-y^2}=\dfrac{1}{x-y^2}$

$z_{xx}=\left\{(x-y^2)^{-1}\right\}_x=-(x-y^2)^{-2}(x-y^2)_x$

$=-\dfrac{1}{(x-y^2)^2}$

$z_{xy}=\left\{(x-y^2)^{-1}\right\}_y=-(x-y^2)^{-2}(x-y^2)_y$

$=\dfrac{2y}{(x-y^2)^2}$

$z_y=\dfrac{(x-y^2)_y}{x-y^2}=-\dfrac{2y}{x-y^2}$

$z_{yx}=\{-2y(x-y^2)^{-1}\}_x=-2y\{(x-y^2)^{-1}\}_x$

$=2y(x-y^2)^{-2}(x-y^2)_x=\dfrac{2y}{(x-y^2)^2}$

$z_{yy}=\{-2y(x-y^2)^{-1}\}_y$

$=-(2y)_y(x-y^2)^{-1}-2y\{(x-y^2)^{-1}\}_y$

$=-2(x-y^2)^{-1}+2y(x-y^2)^{-2}(x-y^2)_y$

$=-\dfrac{2}{x-y^2}-\dfrac{4y^2}{(x-y^2)^2}$

$=\dfrac{-2(x-y^2)-4y^2}{(x-y^2)^2}=-\dfrac{2(x+y^2)}{(x-y^2)^2}$

または, 商の微分法を用いて

$z_{yy}=\dfrac{(-2y)_y(x-y^2)-(-2y)(x-y^2)_y}{(x-y^2)^2}$

$=\dfrac{-2(x-y^2)-4y^2}{(x-y^2)^2}=\dfrac{-2x-2y^2}{(x-y^2)^2}=-\dfrac{2(x+y^2)}{(x-y^2)^2}$

としてもよい. z_{xx}, z_{xy}, z_{yx} も同様.