第2章 2 「全微分」 第2回

解答

1. (1) $dz=(5x^4-4xy^2)dx-4x^2ydy$

(2) $dz=(6x^2y+y^2)dx+(2x^3+2xy-4y^3)dy$

(3) $dz=(6x^2+2xy-2y^2)dx+(x^2-4xy-3y^2)dy$

(4) $dz=-\dfrac{7y}{(x-3y)^2}dx+\dfrac{7x}{(x-3y)^2}dy$

(5) $dz=3e^{3x+y}dx+e^{3x+y}dy$

(6) $dz=\cos x\cos ydx-\sin x\sin ydy$

2. (1) $y-z=1$

(2) $x-y-z=1$

(3) $5x+3y-z=6$

解説

1. (1) $z_x=(x^5-2x^2y^2)_x=(x^5)'-2(x^2)'y^2$
$=5x^4-4xy^2$
$z_y=(x^5-2x^2y^2)_y=-2x^2(y^2)'=-4x^2y$
$dz=z_xdx+z_ydy$ に代入して
$dz=(5x^4-4xy^2)dx-4x^2ydy$

(2) $z_x=(2x^3y+xy^2-y^4)_x=2(x^3)'y+(x)'y^2$
$=6x^2y+y^2$
$z_y=(2x^3y+xy^2-y^4)_y$
$=2x^3(y)'+x(y^2)'-(y^4)'$
$=2x^3+2xy-4y^3$
$dz=z_xdx+z_ydy$ に代入して
$dz=(6x^2y+y^2)dx+(2x^3+2xy-4y^3)dy$

(3) $z_x=\{(2x+y)(x^2-y^2)\}_x$
$=(2x+y)_x(x^2-y^2)+(2x+y)(x^2-y^2)_x$
$=2(x^2-y^2)+2x(2x+y)=6x^2+2xy-2y^2$
$z_y=\{(2x+y)(x^2-y^2)\}_y$
$=(2x+y)_y(x^2-y^2)+(2x+y)(x^2-y^2)_y$
$=x^2-y^2-2y(2x+y)=x^2-4xy-3y^2$
$dz=z_xdx+z_ydy$ に代入して
$dz=(6x^2+2xy-2y^2)dx+(x^2-4xy-3y^2)dy$

(4) $z_x=\dfrac{(2x+y)_x(x-3y)-(2x+y)(x-3y)_x}{(x-3y)^2}$
$=\dfrac{2(x-3y)-(2x+y)}{(x-3y)^2}=-\dfrac{7y}{(x-3y)^2}$
$z_y=\dfrac{(2x+y)_y(x-3y)-(2x+y)(x-3y)_y}{(x-3y)^2}$
$=\dfrac{1(x-3y)+3(2x+y)}{(x-3y)^2}=\dfrac{7x}{(x-3y)^2}$
$dz=z_xdx+z_ydy$ に代入して
$dz=-\dfrac{7y}{(x-3y)^2}dx+\dfrac{7x}{(x-3y)^2}dy$

(5) $z_x=e^{3x+y}(3x+y)_x=3e^{3x+y}$
$z_y=e^{3x+y}(3x+y)_y=e^{3x+y}$
$dz=z_xdx+z_ydy$ に代入して
$dz=3e^{3x+y}dx+e^{3x+y}dy$

(6) $z_x=(\sin x\cos y)_x=\cos x\cos y$
$z_y=(\sin x\cos y)_y=-\sin x\sin y$
$dz=z_xdx+z_ydy$ に代入して
$dz=\cos x\cos ydx-\sin x\sin ydy$

2. (1) $z_x=(x^2-2xy+y^3)_x=2x-2y$
$z_y=(x^2-2xy+y^3)_y=-2x+3y^2$
$x=1,y=1$ のとき $z_x=0=f_x(1,1)$
$z_y=1=f_y(1,1)$ また $z=0=f(1,1)$
$z-f(1,1)=f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)$
に代入して $z-0=0(x-1)+(y-1)$ より
$-y+z=-1$ すなわち $y-z=1$

(2) $z_x=\dfrac{(x-y)_x}{x-y}=\dfrac{1}{x-y}$
$z_y=\dfrac{(x-y)_y}{x-y}=-\dfrac{1}{x-y}$
$x=2,y=1$ のとき $z_x=1=f_x(2,1)$
$z_y=-1=f_y(2,1)$ また $z=0=f(2,1)$
$z-f(2,1)=f_x(2,1)(x-2)+f_y(2,1)(y-1)$
に代入して $z-0=(x-2)-(y-1)$ より
$-x+y+z=-1$
すなわち $x-y-z=1$

(3) $z_x=(x^3y+x^2y^2)_x=3x^2y+2xy^2$
$z_y=(x^3y+x^2y^2)_y=x^3+2x^2y$
$x=1,y=1$ のとき $z_x=5=f_x(1,1)$
$z_y=3=f_y(1,1)$ また $z=2=f(1,1)$
$z-f(1,1)=f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)$
に代入して $z-2=5(x-1)+3(y-1)$ より
$-5x-3y+z=-6$
すなわち $5x+3y-z=6$