第2章 1 「偏導関数」 第2回

解答

1. (1) $f_x = 9x^2 - 4xy, f_y = -2x^2 + 8y$

(2) $f_x = 4xy + 5y^2, f_y = 2x^2 + 10xy - 3y^2$

(3) $f_x = 4x^3 - 6xy^2 + 2y^3, f_y = -6x^2y + 6xy^2$

(4) $f_x = 3x^2 + 2xy - 2y^2, f_y = x^2 - 4xy$

(5) $f_x = \dfrac{5y}{(2x+y)^2}, f_y = -\dfrac{5x}{(2x+y)^2}$

(6) $f_x = \dfrac{2x-y}{x^2-xy}, f_y = -\dfrac{x}{x^2-xy}$

2. (1) $f_x(1,-1) = -1, f_y(1,-1) = 13$

(2) $f_x(1,-1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, f_y(1,-1) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $f_x(1,-1) = e^2, f_y(1,-1) = -e^2$

解説

1. (1) $f_x = (3x^3 - 2x^2y + 4y^2)_x$, y, y^2 は定数だから
$f_x = 3(x^3)' - 2(x^2)'y = 9x^2 - 4xy$
$f_y = (3x^3 - 2x^2y + 4y^2)_y$, x^3, x^2 は定数だから $f_y = -2x^2(y)' + 4(y^2)' = -2x^2 + 8y$

(2) $f_x = (2x^2y + 5xy^2 - y^3)_x$, y, y^2, y^3 は定数だから $f_x = 2(x^2)'y + 5(x)'y^2 = 4xy + 5y^2$
$f_y = (2x^2y + 5xy^2 - y^3)_y$, x^2, x は定数だから
$f_y = 2x^2(y)' + 5x(y^2)' - (y^3)'$
$= 2x^2 + 10xy - 3y^2$

(3) $f_x = (x^4 - 3x^2y^2 + 2xy^3)_x$, y^2, y^3 は定数だから $f_x = (x^4)' - 3(x^2)'y^2 + 2(x)'y^3$
$= 4x^3 - 6xy^2 + 2y^3$
$f_y = (x^4 - 3x^2y^2 + 2xy^3)_y$, x^4, x^2, x は定数だから $f_y = -3x^2(y^2)' + 2x(y^3)'$
$= -6x^2y + 6xy^2$

(4) $f_x = \{(x^2 - xy)(x + 2y)\}_x$
$= (x^2 - xy)_x(x + 2y) + (x^2 - xy)(x + 2y)_x$
y は定数だから
$f_x = (2x - y)(x + 2y) + (x^2 - xy)$
$= 3x^2 + 2xy - 2y^2$
$f_y = \{(x^2 - xy)(x + 2y)\}_y$
$= (x^2 - xy)_y(x + 2y) + (x^2 - xy)(x + 2y)_y$
x^2, x は定数だから
$f_y = -x(x + 2y) + 2(x^2 - xy) = x^2 - 4xy$

(5) $f_x = \dfrac{(x-2y)_x(2x+y) - (x-2y)(2x+y)_x}{(2x+y)^2}$
y は定数だから
$f_x = \dfrac{(2x+y) - 2(x-2y)}{(2x+y)^2} = \dfrac{5y}{(2x+y)^2}$
$f_y = \dfrac{(x-2y)_y(2x+y) - (x-2y)(2x+y)_y}{(2x+y)^2}$
x は定数だから
$f_x = \dfrac{-2(2x+y) - (x-2y)}{(2x+y)^2} = -\dfrac{5x}{(2x+y)^2}$

(6) $f_x = \dfrac{(x^2 - xy)_x}{x^2 - xy}$, y は定数だから $f_x = \dfrac{2x - y}{x^2 - xy}$
$f_y = \dfrac{(x^2 - xy)_y}{x^2 - xy}$, x^2, x は定数だから
$f_y = -\dfrac{x}{x^2 - xy}$

2. (1) $f_x = (x^3 - 2x^2y^2 + 3y^3)_x$, y^2, y^3 は定数だから $f_x = (x^3)' - 2(x^2)'y^2 = 3x^2 - 4xy^2$
$f_y = (x^3 - 2x^2y^2 + 3y^3)_y$, x^3, x^2 は定数だから
$f_y = -2x^2(y^2)' + 3(y^3)' = -4x^2y + 9y^2$
$(1, -1)$ を代入して
$f_x(1,-1) = 3 - 4 = -1$
$f_y(1,-1) = 4 + 9 = 13$

(2) y^2 は定数だから
$f_x = \{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\}_x = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2)_x$
$= \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
x^2 は定数だから
$f_y = \{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\}_y = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2)_y$
$= \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$(1, -1)$ を代入して
$f_x(1,-1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$f_y(1,-1) = \dfrac{-1}{\sqrt{1+(-1)^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3) y は定数だから $f_x = e^{x-y}(x-y)_x = e^{x-y}$
x は定数だから $f_y = e^{x-y}(x-y)_y = -e^{x-y}$
$(1, -1)$ を代入して
$f_x(1,-1) = e^{1+1} = e^2$,
$f_y(1,-1) = -e^{1+1} = -e^2$