第1章 4 「オイラーの公式」 第3回

解答

1. 実部 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，虚部 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2. 実部 $-\dfrac{1}{2}$，虚部 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. (1) $-ie^{-ix}$　　(2) $(3+4i)e^{(3+4i)x}$

解説

1. $\alpha = \dfrac{-1-i}{\sqrt{2}} = \cos\theta + i\sin\theta$ とおく．

$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は

$\theta = \dfrac{5}{4}\pi$ であり $\alpha^3 = \left(\cos\dfrac{5}{4}\pi + i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)^3$

ド・モアブルの公式を用いると

$\alpha^3 = \left(\cos\dfrac{5}{4}\pi + i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)^3 = \cos\dfrac{15}{4}\pi + i\sin\dfrac{15}{4}\pi$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

よって，α^3 の実部は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，虚部は $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である．

2. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$ とおく．

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は

$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ であり $\alpha^4 = \left(\cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)^4$

ド・モアブルの公式を用いると

$\alpha^4 = \left(\cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)^4 = \cos\dfrac{8}{3}\pi + i\sin\dfrac{8}{3}\pi$

$= -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

よって，α^4 の実部は $-\dfrac{1}{2}$，虚部は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．

3. α が複素数の定数のとき $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$ が成り立つことを用いる．