第1章 4 「オイラーの公式」 第2回

解答

1. 実部 1，虚部 0

2. 実部 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，虚部 $\dfrac{1}{2}$

3. (1) ie^{ix}　　(2) $(1-2i)e^{(1-2i)x}$

解説

1. $\alpha = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}} = \cos\theta + i\sin\theta$ とおく．

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は

$\theta = \dfrac{7}{4}\pi$ であり $\alpha^8 = \left(\cos\dfrac{7}{4}\pi + i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)^8$

ド・モアブルの公式を用いると

$\alpha^8 = \left(\cos\dfrac{7}{4}\pi + i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)^8 = \cos 14\pi + i\sin 14\pi$

$= 1 + 0i$

よって，α^8 の実部は 1，虚部は 0 である．

2. $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$ とおく．

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ は

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ であり $\alpha^5 = \left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^5$

ド・モアブルの公式を用いると

$\alpha^5 = \left(\cos\dfrac{\pi}{6}\pi + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^5 = \cos\dfrac{5}{6}\pi + i\sin\dfrac{5}{6}\pi$

$= -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

よって，α^5 の実部は $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，虚部は $\dfrac{1}{2}$ である．

3. α が複素数の定数のとき $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$ が成り立つことを用いる．