第１章３「多項式による近似」「べき級数とマクローリン展開」 第３回

解答

1. (1) 1 次近似式 $\cos 2x = 1 + \varepsilon_1$

2 次近似式 $\cos 2x = 1 - 2x^2 + \varepsilon_2$

(2) 1 次近似式 $\sqrt[3]{x+1} = 1 + \dfrac{1}{3}x + \varepsilon_1$

2 次近似式 $\dfrac{1}{1-x} = 1 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}x^2 + \varepsilon_2$

2. (1) $\sqrt[4]{x} = 1 + \dfrac{1}{4}(x-1) - \dfrac{3}{32}(x-1)^2 + \varepsilon_2$

(2) $\log x = (x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \varepsilon_2$

3. (1) $e^{3x} = 1 + \dfrac{3}{1!}x + \dfrac{3^2}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{3^n}{n!}x^n + \cdots$

(2) $\sin\dfrac{x}{3} = \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3!\cdot 3^3}x^3 + \dfrac{1}{5!\cdot 3^5}x^5 - \cdots$
$+\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot 3^{2n+1}}x^{2n+1} + \cdots$

(3) $\cos(-x) = 1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 - \cdots$
$+\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$

(4) $\log(1+2x) = 2x - \dfrac{2^2}{2}x^2 + \dfrac{2^3}{3}x^3 - \cdots$
$+\dfrac{(-1)^{n-1}2^n}{n}x^n + \cdots$

解説

1. (1) $f(x) = \cos 2x,\ f(0) = \cos 0 = 1,$

$f'(x) = -2\sin 2x,\ f'(0) = 0$

$f''(x) = -4\cos 2x,\ f''(0) = -4$ を

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \varepsilon_1,$

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \varepsilon_2$

に代入する．

(2) $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}},\ f(0) = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}},\ f'(0) = \dfrac{1}{3}$

$f''(x) = -\dfrac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}},\ f''(0) = -\dfrac{2}{9}$ を

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \varepsilon_1,$

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \varepsilon_2$

に代入する．

2. (1) $f(x) = x^{\frac{1}{4}},\ f(1) = 1,$

$f'(x) = \dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}},\ f'(1) = \dfrac{1}{4}$

$f''(x) = -\dfrac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}},\ f''(1) = -\dfrac{3}{16}$ を

$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \dfrac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \varepsilon_2$

に代入する．

(2) $f(x) = \log x,\ f(1) = \log 1 = 0,$

$f'(x) = \dfrac{1}{x},\ f'(1) = 1$

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2},\ f''(1) = -1$ を

$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \dfrac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \varepsilon_2$

に代入する．

3. (1) 教科書 p21 (6) に $3x$ を代入する

(2) 教科書 p21 (7) に $\dfrac{x}{3}$ を代入する

(3) 教科書 p21 (8) に $-x$ を代入する

(4) 教科書 p21 (12) に $2x$ を代入する