第4章 1 「図形の面積」 第3回

解答

1. (1) $\dfrac{125}{6}$ (2) $\dfrac{1}{6}$ (3) $\dfrac{45}{4}$ (4) $\dfrac{7}{12}$

2. (1) 13 (2) $\dfrac{37}{12}$ (3) $\dfrac{128}{15}$

解説

1. (1) 曲線と直線の共有点の x 座標は $y=x^2$,

$y=x+6$ より $x^2=x+6$ すなわち

$x^2-x-6=(x+2)(x-3)=0,\ x=-2, 3$

$-2 \leqq x \leqq 3$ のとき $x^2 \leqq x+6$ より

$$S=\int_{-2}^{3}\{(x+6)-x^2\}dx=\int_{-2}^{3}(-x^2+x+6)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{3}$$
$$=-9+\frac{9}{2}+18-\left(\frac{8}{3}+2-12\right)=\frac{125}{6}$$

(2) 曲線と直線の共有点の x 座標は $y=-x^2$,

$y=3x+2$ より $-x^2=3x+2$ すなわち

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)=0,\ x=-1, -2$

$-2 \leqq x \leqq -1$ のとき $-x^2 \geqq 3x+2$ より

$$S=\int_{-2}^{-1}\{-x^2-(3x+2)\}dx=\int_{-2}^{-1}(-x^2-3x-2)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{-1}$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2-\left(\frac{8}{3}-6+4\right)=\frac{1}{6}$$

(3) 曲線と直線の共有点の x 座標は $y=x^3-2x^2$,

$y=3x$ より $x^3-2x^2=3x$ すなわち

$x^3-2x^2-3x=x(x+1)(x-3)=0$

$x=0, -1, 3$

右側 $0 \leqq x \leqq 3$ のとき $x^3-2x^2 \leqq 3x$ より

$$S=\int_{0}^{3}\{3x-(x^3-2x^2)\}dx=\int_{0}^{3}(-x^3+2x^2+3x)dx$$
$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{3}$$
$$=-\frac{81}{4}+18+\frac{27}{2}=\frac{45}{4}$$

(4) 左側 $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき $x^3-2x^2 \geqq 3x$ より

$$S=\int_{-1}^{0}\{(x^3-2x^2)-3x\}dx=\int_{-1}^{0}(x^3-2x^2-3x)dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{7}{12}$$

2. (1) 曲線と直線 $y=x$ の共有点の x 座標は

$x^2-3x=x$ すなわち

$x^2-4x=x(x-4)=0,\ x=0, 4$

$-1 \leqq x \leqq 0$ のとき $x^2-3x \geqq x$,

$0 \leqq x \leqq 4$ のとき $x^2-3x \leqq x$ より

$$S=\int_{-1}^{0}(x^2-3x-x)dx+\int_{0}^{4}\{x-(x^2-3x)\}dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_{0}^{4}$$
$$=0-\left(-\frac{1}{3}-2\right)-\frac{64}{3}+32=\frac{39}{3}=13$$

(2) 2曲線の共有点の x 座標は $y=-x^3+2x^2$,

$y=x^2-2x$ より $-x^3+2x^2=x^2-2x$ すなわち

$x^3-x^2-2x=x(x+1)(x-2)=0$,

$x=0, -1, 2$

$-1 \leqq x \leqq 0$ のとき $-x^3+2x^2 \leqq x^2-2x$,

$0 \leqq x \leqq 2$ のとき $-x^3+2x^2 \geqq x^2-2x$ より

$$S=\int_{-1}^{0}\{x^2-2x-(-x^3+2x^2)\}dx$$
$$+\int_{0}^{2}\{-x^3+2x^2-(x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=0-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)-4+\frac{8}{3}+4=\frac{37}{12}$$

(3) 2曲線の共有点の x 座標は $y=x^4-x^2$,

$y=3x^2$ より $x^4-x^2=3x^2$ すなわち

$x^4-4x^2=x^2(x-2)(x+2)=0$,

$x=0, \pm 2$

$-2 \leqq x \leqq 2$ のとき $x^4-x^2 \leqq 3x^2$ より

$$S=\int_{-2}^{2}\{3x^2-(x^4-x^2)\}dx=\int_{-2}^{2}(4x^2-x^4)dx$$
$$=\left[\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2}=\frac{32}{3}-\frac{32}{5}-\left(-\frac{32}{3}+\frac{32}{5}\right)$$
$$=\frac{128}{15}$$