第 4 章 1 「図形の面積」 第 2 回

解答

1. (1) $\dfrac{32}{3}$ (2) $\dfrac{9}{2}$ (3) $\dfrac{5}{12}$ (4) $\dfrac{8}{3}$

2. (1) $\dfrac{8}{3}$ (2) $\dfrac{37}{12}$ (3) $\dfrac{37}{12}$

解説

1. (1) 曲線と直線の共有点の x 座標は $y=x^2$, $y=-2x+3$ より $x^2=-2x+3$ すなわち
$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)=0,\ x=-3,1$
$-3 \leqq x \leqq 1$ のとき $x^2 \leqq -2x+3$ より

$$S=\int_{-3}^{1}\{(-2x+3)-x^2\}dx=\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{-3}^{1}$$
$$=-\frac{1}{3}-1+3-(9-9-9)=\frac{32}{3}$$

(2) 曲線と直線の共有点の x 座標は $y=-x^2$, $y=x-2$ より $-x^2=x-2$ すなわち
$x^2+x-2=(x+2)(x-1)=0,\ x=-2,1$
$-2 \leqq x \leqq 1$ のとき $-x^2 \geqq x-2$ より

$$S=\int_{-2}^{1}\{-x^2-(x-2)\}dx=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}$$
$$=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)=\frac{9}{2}$$

(3) 曲線と直線の共有点の x 座標は $y=x^3+x^2$, $y=2x$ より $x^3+x^2=2x$ すなわち
$x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)=0,\ x=0,1,-2$
右側 $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $x^3+x^2 \leqq 2x$ より

$$S=\int_{0}^{1}\{2x-(x^3+x^2)\}dx=\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)dx$$
$$=\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{1}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1$$
$$=\frac{5}{12}$$

(4) 左側 $-2 \leqq x \leqq 0$ のとき $x^3+x^2 \geqq 2x$ より

$$S=\int_{-2}^{0}\{(x^3+x^2)-2x\}dx=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0}=0-\left(4-\frac{8}{3}-4\right)$$
$$=\frac{8}{3}$$

2. (1) 曲線と x 軸の共有点の x 座標は $y=x^2-1$, $y=0$(x 軸) より $x^2-1=(x+1)(x-1)=0$
すなわち $x=\pm 1$
$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $x^2-2x \leqq 0$,
$1 \leqq x \leqq 2$ のとき $x^2-2x \geqq 0$ より

$$S=\int_{-1}^{1}\{0-(x^2-1)\}dx+\int_{1}^{2}(x^2-1-0)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{2}$$
$$=-\frac{1}{3}+1-\left(\frac{1}{3}-1\right)+\frac{8}{3}-2-\left(\frac{1}{3}-1\right)$$
$$=\frac{8}{3}$$

(2) 2 曲線の共有点の x 座標は $y=x^3-2x^2+3x$, $y=2x^2$ より $x^3-2x^2+3x=2x^2$ すなわち
$x^3-4x^2+3x=x(x-1)(x-3)=0,$
$x=0,1,3$
$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $x^3-2x^2+3x \geqq 2x^2$,
$1 \leqq x \leqq 3$ のとき $x^3-2x^2+3x \leqq 2x^2$ より

$$S=\int_{0}^{1}(x^3-2x^2+3x-2x^2)dx+\int_{1}^{3}\{2x^2-(x^3-2x^2+3x)\}dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x^3-4x^2+3x)dx+\int_{1}^{3}(-x^3+4x^2-3x)dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_{1}^{3}$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-\frac{81}{4}+36-\frac{27}{2}-\left(-\frac{1}{4}+\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{37}{12}$$

(3) 2 曲線の共有点の x 座標は $y=-x^3+x^2+2x$, $y=2x^2$ より $-x^3+x^2+2x=2x^2$ すなわち
$x^3+x^2-2x=x(x+2)(x-1)=0,$
$x=0,-2,1$
$-2 \leqq x \leqq 0$ のとき $-x^3+x^2+2x \leqq 2x^2$,
$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $-x^3+x^2+2x \geqq 2x^2$ より

$$S=\int_{-2}^{0}\{2x^2-(-x^3+x^2+2x)\}dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x^2+2x-2x^2)dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=0-\left(4-\frac{8}{3}-4\right)-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1=\frac{37}{12}$$