第 2 章 3 「関数の最大・最小」「不定形の極限」 第 1 回

解答

1. (1) 最大値 0 $(x=0)$, 最小値 -4 $(x=-2)$

(2) 最大値 9 $(x=3)$, 最小値 5 $(x=5)$

(3) 最大値 4 $(x=-1)$, 最小値 -2 $(x=2)$

(4) 最大値 7 $(x=-1,2)$, 最小値 -1 $(x=-2,1)$

(5) 最大値 11 $(x=-2)$, 最小値 2 $(x=-1)$

(6) 最大値 $e+1$ $(x=1)$, 最小値 $1-\dfrac{1}{e}$ $(x=-1)$

2. (1) $-\dfrac{1}{3}$ (2) $-\dfrac{3}{2}$

3. (1) 7 (2) 4 (3) -1 (4) 0

解説

1. (1) $y'=2x+4=2(x+2)$

$y'=0$ となる x は $x=-2$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
y'		$-$	0	$+$	
y	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

最大値 0 $(x=0)$, 最小値 -4 $(x=-2)$

(2) $y'=-2x+6=-2(x-3)$

$y'=0$ となる x は $x=3$

x	2	$\cdots$	3	$\cdots$	5
y'		$+$	0	$-$	
y	8	$\nearrow$	9	$\searrow$	5

最大値 9 $(x=3)$, 最小値 5 $(x=5)$

(3) $y'=-3x^2+2x=-x(3x-2)$

$y'=0$ となる x は $x=0,\dfrac{2}{3}$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{58}{27}$	$\searrow$	-2

最大値 4 $(x=-1)$, 最小値 -2 $(x=2)$

(4) $y'=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$y'=0$ となる x は $x=\pm1$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-1	$\nearrow$	7	$\searrow$	-1	$\nearrow$	7

最大値 7 $(x=-1,2)$, 最小値 -1 $(x=-2,1)$

(5) $y'=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$

$y'=0$ となる x は $x=0,\pm1$

$(x=1$ は $-2\leqq x\leqq 0$ に含まれない$)$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
y'		$-$	0	$+$	0
y	11	$\searrow$	2	$\nearrow$	3

最大値 11 $(x=-2)$, 最小値 2 $(x=-1)$

(6) $y'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$y'=0$ となる x は $e^x>0$ より $1+x=0$,

$x=-1$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	$1-\frac{2}{e^2}$	$\searrow$	$1-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$e+1$

最大値 $e+1$ $(x=1)$, 最小値 $1-\dfrac{1}{e}$ $(x=-1)$

2. (1) 与式 $=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)}{x(x+3)}=\lim_{x\to0}\frac{x-1}{x+3}$

$=\dfrac{-1}{3}=-\dfrac{1}{3}$

(2) 与式 $=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{-2+\frac{3}{x}}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}$

3. ロピタルの定理 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が $\dfrac{0}{0}$ または $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形のとき $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}(4x^2+x-3)=4(-1)^2-1-3=0$,

$\displaystyle\lim_{x\to-1}(6x^2+11x+5)=6(-1)^2-11+5=0$

より $\dfrac{0}{0}$ の不定形

与式$=\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{(4x^2+x-3)'}{(6x^2+11x+5)'}=\lim_{x\to-1}\frac{8x+1}{12x+11}$

$=\dfrac{-8+1}{-12+11}=\dfrac{-7}{-1}=7$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}(x^4-3x^2-4)=2^4-3\cdot2^2-4=0$,

$\displaystyle\lim_{x\to2}(x^3-7x+6)=2^3-7\cdot2+6=0$

より $\dfrac{0}{0}$ の不定形

与式$=\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{(x^4-3x^2-4)'}{(x^3-7x+6)'}=\lim_{x\to2}\frac{4x^3-6x}{3x^2-7}$

$=\dfrac{32-12}{12-7}=\dfrac{20}{5}=4$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\sin x=\sin0=0$, $\displaystyle\lim_{x\to0}(x^2-x)=0^2-0=0$

より $\dfrac{0}{0}$ の不定形

与式$=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)'}{(x^2-x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2x-1}=\frac{\cos0}{0-1}$

$=\dfrac{1}{-1}=-1$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2x-1)=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(e^x+x)=\infty$ より

$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形

与式$=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)'}{(e^x+x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x+1}=\frac{2}{\infty}$

$=0$