第2章 1 「接線と法線」 第1回

解答

1. (1) $y=2x-5$ (2) $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

2. (1) -1 (2) $-\dfrac{1}{2}$ (3) 1 (4) 2

3. (1) $y=-3x+4$ (2) $y=4x+2$

4. (1) $-\dfrac{1}{4}$ (2) 1

5. (1) $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$ (2) $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$

解説

1. (1) 例題同様に $\dfrac{y-1}{x-3}=2$ より $y-1=2(x-3)$

すなわち $y=2(x-3)+1=2x-5$

(2) 傾きがそれぞれ m_1 と m_2 である直線が垂直なとき $m_1m_2=-1$ だから求める直線の傾きを m とすると $2m=-1$ より $m=-\dfrac{1}{2}$

よって $\dfrac{y-1}{x-3}=-\dfrac{1}{2}$ より $y-1=-\dfrac{1}{2}(x-3)$

すなわち $y=-\dfrac{1}{2}(x-3)+1=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

2. $x=a$ に対応する点における接線の傾きは $f'(a)$

(1) $f(x)=x^2+x$ とおくと $f'(x)=2x+1$

$f'(-1)=2\cdot(-1)+1=-1$

接線の傾きは -1

(2) $f(x)=\dfrac{2}{x}=2x^{-1}$ とおくと

$f'(x)=-2x^{-2}=-\dfrac{2}{x^2}$

$f'(2)=-\dfrac{2}{2^2}=-\dfrac{1}{2}$

接線の傾きは $-\dfrac{1}{2}$

(3) $f(x)=4\sqrt{x}=4x^{\frac{1}{2}}$ とおくと

$f'(x)=4\cdot\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$f'(4)=\dfrac{2}{\sqrt{4}}=\dfrac{2}{2}=1$

接線の傾きは 1

(4) $f(x)=2\log x$ とおくと $f'(x)=\dfrac{2}{x}$

$f'(1)=\dfrac{2}{1}=2$

接線の傾きは 2

3. 曲線 $y=f(x)$ において $x=a$ に対応する点 $(a,f(a))$ における接線の方程式は $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

(1) $f(x)=-x^2+x$ とおくと

$f'(x)=-2x+1, f'(2)=-4+1=-3$

接線の方程式は $y-(-2)=-3(x-2)$

すなわち $y=-3(x-2)-2=-3x+4$

(2) $f(x)=x^3+x$ とおくと $f'(x)=3x^2+1$

$f(-1)=(-1)^3+(-1)=-1-1=-2$

$f'(-1)=3(-1)^2+1=3+1=4$

接線の方程式は $y-(-2)=4\{x-(-1)\}$

すなわち $y=4(x+1)-2=4x+2$

4. $x=a$ に対応する点における法線の傾き $=-\dfrac{1}{f'(a)}$

(1) $f(x)=x^2+2x$ とおくと $f'(x)=2x+2$

法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(1)}=-\dfrac{1}{2+2}=-\dfrac{1}{4}$

(2) $f(x)=x^3+2x^2$ とおくと $f'(x)=3x^2+4x$

法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(-1)}=-\dfrac{1}{3-4}=1$

5. $x=a$ に対応する点 $(a,f(a))$ における法線の方程式は

$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$ $(f'(a)\fallingdotseq 0$ のとき)

(1) $f(x)=2x^2+x$ とおくと $f'(x)=4x+1$

$f(-1)=2(-1)^2+(-1)=1$

$f'(-1)=-4+1=-3$

法線の方程式は

$y-1=-\dfrac{1}{-3}\{x-(-1)\}$ すなわち

$y=\dfrac{1}{3}(x+1)+1=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$

(2) $f(x)=-x^4+x^2$ とおくと $f'(x)=-4x^3+2x$

$f(1)=-1+1=0, f'(1)=-4+2=-2$

法線の方程式は

$y-0=-\dfrac{1}{-2}(x-1)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$

すなわち $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$