第１章 2 「微分係数」「導関数」 第３回

解答

1. (1) 4　　(2) $a+b$

2. (1) 2　　(2) 12

3. (1) $f'(a)=-2a$, 傾き -4

(2) $f'(a)=2a+1$, 傾き 3

4. (1) $8x$, 微分係数 8　　(2) $-2x$, 微分係数 -2

(3) $4x+3$, 微分係数 7　　(4) $3x^2+1$, 微分係数 4

解説

1. (1) $f(x)=4x-1$ とおくと

$f(a)=4a-1,\ f(b)=4b-1$ より平均変化率は

$$\frac{(4b-1)-(4a-1)}{b-a}=\frac{4(b-a)}{b-a}=4$$

(2) $f(x)=x^2-4$ とおくと

$f(a)=a^2-4,\ f(b)=b^2-4$ より平均変化率は

$$\frac{(b^2-4)-(a^2-4)}{b-a}=\frac{b^2-a^2}{b-a}$$

$$=\frac{(b+a)(b-a)}{b-a}=a+b$$

2. (1) $f'(1)=\lim_{z\to 1}\frac{(z^2+3)-4}{z-1}$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{z^2-1}{z-1}=\lim_{z\to 1}\frac{(z+1)(z-1)}{z-1}$$

$$=\lim_{z\to 1}(z+1)=2$$

(2) $f'(2)=\lim_{z\to 2}\frac{z^3-8}{z-2}$

$$=\lim_{z\to 2}\frac{(z-2)(z^2+2z+4)}{z-2}$$

$$=\lim_{z\to 2}(z^2+2z+4)=12$$

3. (1) $f'(a)=\lim_{z\to a}\frac{(-z^2)-(-a^2)}{z-a}$

$$=\lim_{z\to a}\frac{-(z^2-a^2)}{z-a}=\lim_{z\to a}\frac{-(z+a)(z-a)}{z-a}$$

$$=\lim_{z\to a}\{-(z+a)\}=-2a$$

点 $(2,\ -4)$ における接線の傾きは, $f'(2)=-4$

(2) $f'(a)=\lim_{z\to a}\frac{(z^2+z)-(a^2+a)}{z-a}$

$$=\lim_{z\to a}\frac{(z^2-a^2)+(z-a)}{z-a}$$

$$=\lim_{z\to a}\frac{(z+a)(z-a)+(z-a)}{z-a}$$

$$=\lim_{z\to a}\{(z+a)+1\}=2a+1$$

点 $(1,\ 2)$ における接線の傾きは, $f'(1)=3$

4. (1) $f(x)=4x^2$ とおくと, $f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{4z^2-4x^2}{z-x}$

$$=\lim_{z\to x}\frac{4(z+x)(z-x)}{z-x}=\lim_{z\to x}4(z+x)=8x$$

$x=1$ における微分係数は, $f'(1)=8$

(2) $f(x)=-x^2+3$ とおくと

$$f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{(-z^2+3)-(-x^2+3)}{z-x}$$

$$=\lim_{z\to x}\frac{-(z^2-x^2)}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{-(z+x)(z-x)}{z-x}$$

$$=\lim_{z\to x}\{-(z+x)\}=-2x$$

$x=1$ における微分係数は, $f'(1)=-2$

(3) $f(x)=2x^2+3x$ とおくと

$$f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{(2z^2+3z)-(2x^2+3x)}{z-x}$$

$$=\lim_{z\to x}\frac{2(z^2-x^2)+3(z-x)}{z-x}$$

$$=\lim_{z\to x}\frac{2(z+x)(z-x)+3(z-x)}{z-x}$$

$$=\lim_{z\to x}\{2(z+x)+3\}=4x+3$$

$x=1$ における微分係数は, $f'(1)=7$

(4) $f(x)=x^3+x$ とおくと

$$f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{(z^3+z)-(x^3+x)}{z-x}$$

$$=\lim_{z\to x}\frac{(z^3-x^3)+(z-x)}{z-x}$$

$$=\lim_{z\to x}\frac{(z-x)(z^2+zx+x^2)+(z-x)}{z-x}$$

$$=\lim_{z\to x}\{(z^2+zx+x^2)+1\}=3x^2+1$$

$x=1$ における微分係数は, $f'(1)=4$