日　付	学　科	学　年	番　　号	名　　前

第4章 3 「回転を表す線形変換」「直交行列と直交変換」 第2回

1. 次の三角関数の値を求めよ.

(1) $\sin\dfrac{\pi}{4}$　　(2) $\cos\dfrac{\pi}{2}$　　(3) $\cos\dfrac{2}{3}\pi$　　(4) $\sin\dfrac{3}{2}\pi$

2. 平面上で原点のまわりに θ 回転させる変換を表す行列を $T(\theta)$ とする．次の $T(\theta)$ を求めよ.

(1) $T\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$　　(2) $T\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)$　　(3) $T\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$

3. 座標平面上の点 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点 P' の座標を求めよ.

例題 行列 $B = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が直交行列であることを確かめよ.

解 行列 B の1列目，2列目，3列目を $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく.

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0^2} = 1,\ |\boldsymbol{b}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = 1,\ |\boldsymbol{c}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2} + 0\times 0 = 0,\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 0 + 0\times 1 = 0,$$

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = 0\times\frac{1}{2} + 0\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1\times 0 = 0$$

より，直交行列であることがわかる.

4. 次の行列の中から，直交行列を選べ.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad A_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$