第4章 4 「固有値と固有ベクトルの計算」 第3回

解答

1. (1) $x=-1,\ -2,\ 3$ (2) $x=2,\ -2,\ -\dfrac{1}{2}$

2. 固有値・固有ベクトルは順に対応

(1) $\lambda=-3,\ 5$

(2) $c_1\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\ c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\ (c_1\fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0,\ c_2 \neq 0)$

3. 固有値・固有ベクトルは順に対応

(1) $\lambda=0,\ 1,\ 3$

(2) $c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ c_3\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

$(c_1\neq 0,\ c_2\neq 0,\ c_3\neq 0)$

解説

1. (1) 左辺 $=P(x)$ とおく．$P(-1)=0$ より，$P(x)$ は $x+1$ で割り切れる (因数定理).

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -x & -6 & \\
\hline
x+1 & x^3 & & -7x & -6 \\
 & x^3 & +x^2 & & \\
\hline
 & & -x^2 & -7x & \\
 & & -x^2 & -x & \\
\hline
 & & & -6x & -6 \\
 & & & -6x & -6 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

よって，$P(x)=(x+1)(x^2-x-6)$ を得る．さらに因数分解して

$$P(x)=(x+1)(x+2)(x-3)$$

よって，$P(x)=0$ を解いて $x=-1,\ -2,\ 3$

(2) 左辺 $=P(x)$ とおく．$P(2)=0$ より，$P(x)$ は $x-2$ で割り切れる (因数定理)．(1) と同様に割り算を計算して，$P(x)=(x+2)(2x^2-3x-2)$ を得る．さらに因数分解して

$$P(x)=(x+2)(x-2)(2x+1)$$

よって，$P(x)=0$ を解いて $x=2,\ -2,\ -\dfrac{1}{2}$

2. (1) 固有方程式

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 8\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-5)=0$$

より，固有値 $\lambda=-3,\ 5$ 得る．

(2) $\underline{\lambda=-3\text{ のとき}}$

$\begin{pmatrix}4 & 8\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ から $x=-2y$ となる．よって，固有ベクトル $c_1\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ $(c_1\neq 0)$ を得る．

$\underline{\lambda=5\text{ のとき}}$

$\begin{pmatrix}-4 & 8\\2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ から $x=2y$ となる．よって，固有ベクトル $c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $(c_2\neq 0)$ を得る．

3. (1) 固有方程式

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ -1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)=0$$

より，固有値 $\lambda=0,\ 1,\ 3$ を得る．

(2) $\underline{\lambda=0\text{ のとき}}$ $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\\-1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

から

$$\begin{cases}x\qquad\ -\ z=0\cdots①\\ \qquad y+\ z=0\cdots②\\ -x+y+2z=0\cdots③\end{cases}$$

$2\times①+③$および② より $x=z,\ y=-z$ となる．よって，固有ベクトル $c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $(c_1\neq 0)$ を得る．

$\underline{\lambda=1\text{ のとき}}$ $\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\0 & 0 & 1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

から $x=y,\ z=0$ を得る．よって，固有ベクトル $c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $(c_2\neq 0)$ を得る．

$\underline{\lambda=3\text{ のとき}}$ $\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\0 & -2 & 1\\-1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

から

$$\begin{cases}-2x\qquad\ -z=0\cdots①\\ \qquad -2y+z=0\cdots②\\ -\ x+\ y-z=0\cdots③\end{cases}$$

① より $z=-2x$ となる．②へ代入して，$-2y-2x=0$ つまり，$y=-x$ となる．よって，固有ベクトル $c_3\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ $(c_3\neq 0)$ を得る．