第 4 章 2 「合成変換と逆変換」 第 2 回

解答

1. (1) $\begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 16 & 14 \end{pmatrix}$, $(-13,\ -16)$　(2) $\begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$, $(-14,\ -8)$

2. (1) $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

3. $(5,\ -2)$

4. 直線 $x + y = 2$

解説

1. (1) 合成変換 $f \circ g$ を表す行列は $AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 16 & 14 \end{pmatrix}$ により与えられる．点 $(-1,\ 0)$ の $f \circ g$ による像は $\begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 16 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -16 \end{pmatrix}$ より，点 $(-13,\ -16)$ となる．

(2) 合成変換 $g \circ f$ を表す行列は $BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$ により与えられる．点 $(-1,\ 0)$ の $g \circ f$ による像は $\begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -8 \end{pmatrix}$ より，点 $(-14,\ -8)$ となる．

2.
(1) f^{-1} を表す行列は f を表す行列の逆行列により与えられる．したがって，$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$

(2) g^{-1} を表す行列は g を表す行列の逆行列により与えられる．したがって，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) まず，線形変換 $f \circ g$ を与える行列を求めると $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ となる．線形変換 $(f \circ g)^{-1}$ はこの行列の逆行列で表されるから，$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

3. 点 $\mathrm{P}'(1,\ -2)$ に移されるもとの点の座標を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ となる．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

より，点 P の座標 $(5,\ -2)$ を得る．

4. 線形変換 f を表す行列が正則であることに注意する．直線 $y = x+2$ 上の点を $(x,\ y)$，もとの図形上の点を $(x',\ y')$ とすると $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる．点 $(x,\ y)$ は $y = x + 2$ を満たすから $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+2 \end{pmatrix}$ となる．両辺に左から逆行列を掛けて，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ x+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x-2}{2} \\ \dfrac{-x+6}{2} \end{pmatrix}$$

よって，

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-2}{2} \cdots ① \\ y' = \dfrac{-x+6}{2} \cdots ② \end{cases}$$

を得る．x を消去するために，① + ② とすると，$x' + y' = 2$ となる．よって，もとの図形は直線 $x + y = 2$ となることがわかる．