# 第４章 １ 「線形変換の定義」「線形変換の基本性質」 第２回

## 解答

**1.** (1) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $(-6,\ -1)$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $(2,\ 5)$

**2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

**3.** (1) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 15 \\ 30 \end{pmatrix}$

**4.** (1) 直線 $x - 7y = 0$

## 解説

**1.** 線形変換を表す行列は，行列の積に変形することにより求められる．

(1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-2y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，また，$x=-1,\ y=1$ を代入して $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$ より，点 $(-1,\ 1)$ の像は点 $(-6,\ -1)$ となることがわかる．

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，また，$x=-1,\ y=1$ を代入して $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ より，点 $(-1,\ 1)$ の像は点 $(2,\ 5)$ となることがわかる．

**2.** 問題の条件より，$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ となっている．教科書 125 ページ (4) を用いて，これらをまとめて書くと $A\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$ となる．ここで，$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，$AB = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \cdots\cdots$ ①
$|B| = -2-4 = -6 \neq 0$ より，$B$ は正則だから，①の両辺の右から $B^{-1}$ を掛けて

$$(AB)B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}B^{-1}$$

左辺 $=(AB)B^{-1} = A(BB^{-1}) = A$ および $B^{-1} = \dfrac{1}{-6}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ となることに注意して，

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

**3.** (1) $f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{p}) + f(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $f(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{p}) - f(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

(3) $f(3\boldsymbol{p}-6\boldsymbol{q}) = f(3\boldsymbol{p}) + f(-6\boldsymbol{q}) = 3f(\boldsymbol{p}) - 6f(\boldsymbol{q}) = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \end{pmatrix}$

**4.** 直線上の点を $(x,\ y)$, 線形変換 $f$ によって移った先の点の座標を $(x',\ y')$ とする．$(x',\ y')$ がどのような図形になるか調べればよい．$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より，

$$x' = x + 2y \cdots ① \quad \text{および} \quad y' = x \cdots ②$$

を得る．①へ $y = 3x$ を代入して $x' = x + 2\cdot 3x = 7x$ より，

$$x' = 7x \cdots ③$$

となる．②から，$x = y'$ だから，これを③へ代入して $x' = 7y'$ となる．したがって，直線 $x - 7y = 0$ を得る．