第3章 5 「行列式と逆行列」「連立1次方程式と行列式」 第3回

解答

1. (1) $D_{12}=4,\ D_{21}=3$ (2) $D_{13}=-4,\ D_{21}=3,\ D_{33}=5$

2.
(1) 正則である． $A^{-1}=\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ (2) 正則である． $B^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$

3. (1) $x=-\dfrac{3}{4},\ y=\dfrac{13}{8}$ (2) $x=\dfrac{1}{3},\ y=-\dfrac{2}{3},\ z=\dfrac{1}{3}$

解説

1. (1) $D_{12}=|4|=4,\ D_{21}=|3|=3$

(2) $D_{13}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1-3=-4,\ D_{21}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{vmatrix}=3-0=3,\ D_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-1=5$

2. $(i,\ j)$ 成分の小行列式を D_{ij} と表す．

(1) $|A|=0-15=-15\fallingdotseq 0$ だから，正則である．

$$A^{-1}=\frac{1}{-15}\begin{pmatrix}D_{11} & -D_{21}\\ -D_{12} & D_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{-15}\begin{pmatrix}0 & -3\\ -5 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 5 & -1\end{pmatrix}$$

(2) 教科書 87 ページのサラスの方法を用いて行列式を計算すると，

$$|B|=8+0+0-0-0+8=16\fallingdotseq 0$$

よって，正則である．

$$B^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}D_{11} & -D_{21} & D_{31}\\ -D_{12} & D_{22} & -D_{32}\\ D_{13} & -D_{23} & D_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}4 & 0 & -4\\ 0 & 4 & 0\\ 8 & 0 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

3. 教科書 110 ページのクラメルの公式を用いる．

(1) $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ とおくと

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-8,\quad \varDelta_1=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6,\quad \varDelta_2=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-13$$

よって

$$x=\frac{\varDelta_1}{|A|}=\frac{6}{-8}=-\frac{3}{4},\quad y=\frac{\varDelta_2}{|A|}=\frac{-13}{-8}=\frac{13}{8}$$

(2) $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\\ 1 & 5 & 12\end{pmatrix}$ とおくと，$|B|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\\ 1 & 5 & 12\end{vmatrix}=3$ であり，

$$\varDelta_1=\begin{vmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 5\\ 1 & 5 & 12\end{vmatrix}=1,\quad \varDelta_2=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 5\\ 1 & 1 & 12\end{vmatrix}=-2,\quad \varDelta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 5 & 1\end{vmatrix}=1$$

よって

$$x=\frac{\varDelta_1}{|B|}=\frac{1}{3},\quad y=\frac{\varDelta_2}{|B|}=-\frac{2}{3},\quad z=\frac{\varDelta_3}{|B|}=\frac{1}{3}$$