第１章 ５ 「直線の方程式」「平面の方程式」「球の方程式」 第３回

解答

1. t は実数

(1) $x = 4 + 2t,\ y = -3 + 5t,\ z = -1 - 3t$ $\left(\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+3}{5} = \dfrac{z+1}{-3}\right)$

(2) $x = 5 - 4t,\ y = -1 + 3t,\ z = 3 - 5t$ $\left(\dfrac{x-5}{-4} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{-5}\right)$

これ以外の次のいずれも正解である.

$x = 1 - 4t,\ y = 2 + 3t,\ z = -2 - 5t$ $\left(\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+2}{-5}\right)$

$x = 5 + 4t,\ y = -1 - 3t,\ z = 3 + 5t$ $\left(\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-3}{5}\right)$

$x = 1 + 4t,\ y = 2 - 3t,\ z = -2 + 5t$ $\left(\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+2}{5}\right)$

2. (1) $x - 2y + 3z = -7$　(2) $x + 3y - 2z = 9$

3. (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

(2) $(x+4)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$

(3) $(x-3)^2 + (y+5)^2 + (z-1)^2 = 12$

4. (1) 中心 $(-2,\ 4,\ 1)$ 半径 $\sqrt{5}$　(2) 中心 $(-1,\ 7,\ 0)$ 半径 3

解説

1. 点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ である直線の方程式は

$x = x_0 + v_1t,\ y = y_0 + v_2t,\ z = z_0 + v_3t$ (t は実数)

(2) 直線が通る点として $(5,\ -1,\ 3)$，方向ベクトルとして $\bigl(1-5,\ 2-(-1),\ -2-3\bigr) = (-4,\ 3,\ -5)$ を選ぶと，直線の方程式は $x = 5 - 4t,\ y = -1 + 3t,\ z = 3 - 5t$ (t は実数)

これより $t = \dfrac{x-5}{-4},\ t = \dfrac{y+1}{3},\ t = \dfrac{z-3}{-5}$ だから，t を消去して $\dfrac{x-5}{-4} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{-5}$

直線が通る点として $(1,\ 2,\ -2)$，方向ベクトルとして $\bigl(5-1,\ -1-2,\ 3-(-2)\bigr) = (4,\ -3,\ 5)$ も選べるから，解答に載せた他の 3 つのいずれでもよい.

2. 点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，零ベクトルでないベクトル $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ に垂直な平面の方程式は

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

(1) $1(x+2) + (-2)(y-1) + 3(z+1) = 0$ より $x - 2y + 3z = -7$

(2) 求める平面は $\vec{n} = (1,\ 3,\ -2)$ に垂直だから $1(x-1) + 3(y-2) + (-2)(z+1) = 0$

よって $x + 3y - 2z = 9$

3. 点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を中心とする半径 r の球の方程式は $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$ である.

(3) 中心の座標は $\left(\dfrac{5+1}{2},\ \dfrac{-3-7}{2},\ \dfrac{3+(-1)}{2}\right) = (3,\ -5,\ 1)$

半径は $\sqrt{(5-3)^2 + \{-3-(-5)\}^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{3}$

よって，求める球の方程式は $(x-3)^2 + (y+5)^2 + (z-1)^2 = 12$

4. (1) 方程式を変形すると

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 2z + 1 + 16 = 4 + 16 + 1 \qquad \therefore\ (x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 5$$

よって，中心は $(-2,\ 4,\ 1)$，半径は $\sqrt{5}$ である.

(2) 方程式を変形すると

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 14y + 49 + z^2 + 41 = 1 + 49 \qquad \therefore\ (x+1)^2 + (y-7)^2 + z^2 = 9$$

よって，中心は $(-1,\ 7,\ 0)$，半径は 3 である.