第１章 3 「ベクトルの図形への応用」「直線のベクトル方程式」 第２回

解答

1. (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$, $\mathrm{P}\,(-1,\ 0)$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}$, $\mathrm{P}\left(-\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{2}{5}\right)$

2. $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (5,\ 10)$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (7,\ 14)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，A, B, C は一直線上にある．

3. t は実数

(1) $x = 3 + 4t$, $y = 2 - 5t$

(2) $x = 1 \quad (y = -4 + 3t)$

(3) $x = 2 + 2t$, $y = -5 + 4t$

これ以外に次のいずれも正解である．

$x = 4 + 2t$, $y = -1 + 4t$　　$x = 2 - 2t$, $y = -5 - 4t$　　$x = 4 - 2t$, $y = -1 - 4t$

4. (1) $(4,\ -1)$　　(2) $(3,\ -5)$

5. (1) $\dfrac{2}{5}$　　(2) $\dfrac{19}{\sqrt{29}}$

解説

1. 2 点 A, B に対し，線分 AB を $m : n$ の比に内分する点 P の位置ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$ である．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+2} = \dfrac{2(-4,\ 2) + (5,\ -4)}{3} = \dfrac{(-3,\ 0)}{3} = (-1,\ 0)$ より，点 P の座標は　$(-1,\ 0)$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+3} = \dfrac{3(-4,\ 2) + 2(5,\ -4)}{5} = \dfrac{(-2,\ -2)}{5} = \left(-\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{2}{5}\right)$ より，

点 P の座標は　$\left(-\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{2}{5}\right)$

2. 3 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のうち 2 つが平行であれば，点 A, B, C は一直線上にある．

3. 点 $(x_0,\ y_0)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{v} = (v_1,\ v_2)$ である直線の媒介変数による方程式は

$x = x_0 + v_1 t$, $y = y_0 + v_2 t \quad$ (t は実数)

(3) 直線が通る点として $(2,\ -5)$，方向ベクトルとして $\big(4-2,\ -1-(-5)\big) = (2,\ 4)$ を選ぶと，媒介変数による方程式は　$x = 2 + 2t$, $y = -5 + 4t \quad$ (t は実数)

直線が通る点として $(4,\ -1)$，方向ベクトルとして $\big(2-4,\ -5-(-1)\big) = (-2,\ -4)$ も選べるから，解答に載せた他の 3 つのいずれでもよい．

4. 直線 $ax + by + c = 0$ の法線ベクトルの 1 つは $\vec{n} = (a,\ b)$ である．

5. 点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離は $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ である．

(1) 点と直線の距離の公式より

$$\frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$$

(2) 点と直線の距離の公式より

$$\frac{|2 \times (-3) + 5 \times (-4) + 7|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{|-19|}{\sqrt{29}} = \frac{19}{\sqrt{29}}$$